تمثيل المجموعات المرتبة المنتهية

اذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و $x, y \in E$ فإننا نقول أن العنصر y يغطي العنصر x اذا كان:

أ- $x \leq y$

ب- اذا لم يكن بالإمكان ايجاد عنصر مثل z يحقق:

$$x < z < y$$

مبرهنة

في أي مجموعة مرتبة منتهية يكون:

1) كل عنصر غير أصغري يغطي على الأقل عنصراً واحداً

2) كل عنصر غير أعظمي يكون مغطى بعنصر واحد على الأقل

البرهان

1) ليكن y عنصر غير أصغري فهذا يعني انه يوجد عنصر على الأقل مثل x_1 حيث

$$x_1 < y$$

اذا كان y يغطي x_1 يكون قد تم المطلوب
أما اذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل
x_2 بحيث يكون:

$$x_1 < x_2 < y$$

اذا كان y يغطي x_2 يكون قد تم المطلوب
أما اذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل
x_3 بحيث يكون:

$$x_2 < x_3 < y$$

وهكذا ....

وبما أن المجموعة E منتهية فإننا سنحصل حتماً
على عنصر x_p الذي يكون مغطى بواسطة y
وبشكل مشابه يكون البرهان على (2)

القثيل بالرسم (أو بالمخطط)

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة فيمكن
تمثيلها كما يلي:

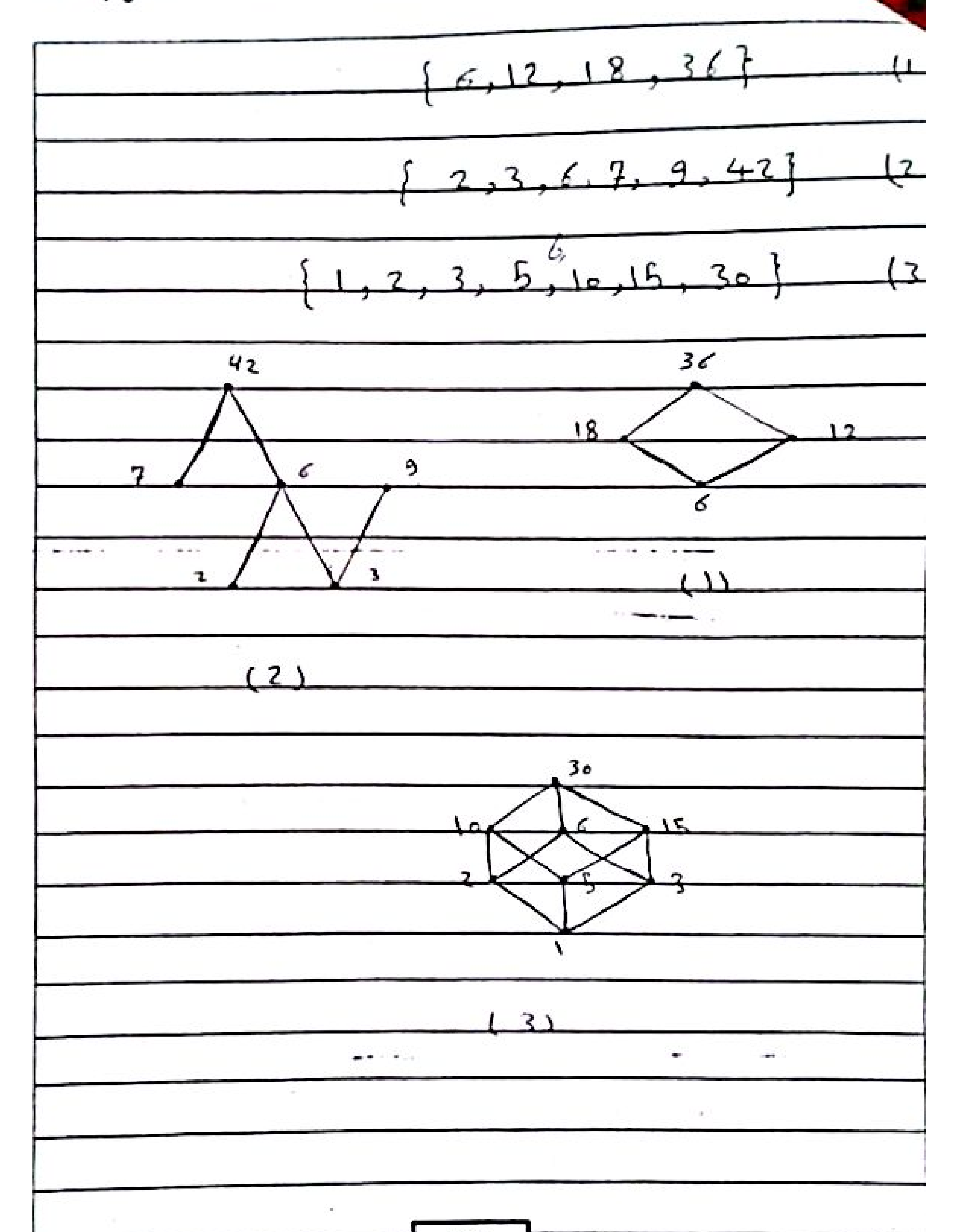
- كل عنصر من عناصرها يقابله نقطة واحدة على المخطط

- اذا كان العنصر y يغطي العنصر x فإن النقطة x ترتبط بالنقطة y بواسطة قطعة مستقيمة بينهما وتكون صاعدة.

ويجب الانتباه الى أن العناصر الاصغرية (الاعظمية) تشغل الجزء السفلي (العلوي) من الشكل وان أي عنصرين يكونا متقاربين اذا وفقط اذا كانا مرتبطين فيما بينهما بخط صاعد.

أمثلة

من الأمثلة الشائعة جميعها مجموعات جزئية منتهية من المجموعة الجزئية $(\leq , N^*)$



1) $\{6, 12, 18, 36\}$

2) $\{2, 3, 6, 7, 9, 42\}$

3) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

الشبكات

تعاريف :

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة :

• نقول بأن E تشكل شبكة عليا اذا كان لأي

زوج من العناصر $\{x, y\}$ من E يملك

حد أعلى أصغري في E. ونكتب

$$\sup\{x, y\} = x \vee y$$

وتقرأ (x أو y) . وبعض الكتب تستخدم الرموز

$$x \vee y = x \cup y = x + y$$

• نقول بأن E تشكل شبكة دنيا اذا كان من

أجل أي زوج من العناصر $\{x, y\}$ من E

يملك حد أدنى أعظمي في E . ونكتب

$$\inf_E \{x,y\} = x \wedge y$$

ونقرأ (x , y) ، بعض الكتب تستخدم الرموز

$$x \wedge y = x \cap y = x \cdot y$$

• نقول عن E بأنها شبكة اذا كانت بنفس الوقت نصف شبكة عليا ودنيا.

نلاحظ بأن نصف الشبكة الدنيا من أجل علاقة الترتيب $\geq$ هي الـ نصف شبكة عليا من أجل علاقة الترتيب $\leq$

أمثلة

(1) من أجل أي مجموعة E فإن $(P(E), \subseteq)$ هي شبكة فإذا كانت X و Y مجموعتان جزئيتان من E فإن:

$$x \wedge y = x \cap y$$

$$x \vee y = x \cup y$$

(2) $(N^*, |)$ تكون شبكة حيث:

$$x \vee y = \text{Lcm}(x, y)$$

رمز للمضاعف المشترك البسيط

$$x \wedge y = \text{gcd}(x, y)$$

رمز القاسم المشترك الأعظم

(3) كل سلسلة تكون شبكة حيث:

$$x \wedge y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

مبرهنة

في نصف الشبكة العليا $(F, \leq)$ فإن قانون الربط $x \vee y$ يحقق الخواص:

المادة: نظرية الشبكات **المحاضرة:** الثالثة

1) الجامعية (أي أن $x \vee x = x$)

2) التبديل (أي أن $x \vee y = y \vee x$)

3) التجميعية (أي أن $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$)

البرهان

الخاصيتين الأولى والثانية واضحتين ، لنبرهن

الخاصة الثالثة:

لنفرض أن $S = x \vee (y \vee z)$ $\Leftarrow$

$S \geq x$ و $S \geq y \vee z$ $\Leftarrow$

$S \geq x$ و $S \geq y$ ، $S \geq z$ $\Leftarrow$

$S \geq x \vee y$ و $S \geq z$ $\Leftarrow$

$S \geq (x \vee y) \vee z$

ومنه فإن:

$x \vee (y \vee z) \geq (x \vee y) \vee z$ ..... ①

اذا فرضنا $M = (x \vee y) \vee z$ فإن :

$M \geq x \vee y$, $M \geq z$ $\Leftarrow$

$M \geq x$, $M \geq y$, $M \geq z$ $\Leftarrow$

$M \geq x$, $M \geq y \vee z$ $\Leftarrow$

$M \geq x \vee (y \vee z)$ $\Leftarrow$

$(x \vee y) \vee z \geq x \vee (y \vee z)$ ..... ②

من ① ، ② تنتج المساواة

ملاحظات

1) إن هذه المبرهنة تكون أيضاً صحيحة من أجل

ضمن الشبكة الدنيا مع قانون التشكيل الداخلي

$x \wedge y$

2) البرهان السابق يبين أنه $x\vee(y\vee z)=$ ؟

ما هو إلا $\sup_E\{x,y,z\}$ فيمكن أن

نكتب $x\vee y\vee z$ بدلاً من $x\vee(y\vee z)$

3) يمكن الاستنتاج بسهولة أن كل مجموعة جزئية

منتهية غير خالية من نصف شبكة عليا تملك حداً

أعلى أصغرياً، نتيجة مشابهة من أجل نصف الشبكة

الدنيا (أي أن أي مجموعة جزئية منتهية من نصف الشبكة

الدنيا تملك حداً أدنى أعظمياً)

الحالة العكسية: (مبرهنة)

لتكن E مزودة بقانون تشكيل داخلي والذي نرمز

له بـ $x\vee y$ نتساءل هل يمكن تعريف علاقة

الترتيب $\leq$ على E التي تجعله نصف شبكة عليا ويكون

$$\sup_E \{x, y\} = x \vee y$$

الدراسة السابقة تشير إلى شروط ضرورية وهي :

1) القانون $\vee$ يجب أن يحقق الخواص الإبدالية والتجميعية والتجميعية

2) إذا كان $x \leq y \Leftrightarrow \sup_E\{x,y\} = y \Leftrightarrow x \vee y = y$

تبدأ المحاضرة من هنا
مبرهنة

لتكن E مجموعة مزودة بقانون التشكيل الداخلي

$x \vee y$ والذي يحقق الخواص الإبدالية والتجميعية

والتجميعية عندئذٍ إذا توجد علاقة ترتيب وحيدة بحيث

E حيث تكون E نصف شبكة عليا لأجلها يكون

العنصران x, y من E فإن :

$$\left\{ \sup_E \{x, y\} = x \vee y \right.$$

البرهان

إن وجدت علاقة ترتيب جزئي مثلاً تكون معرفة

بالشكل $x \le y$ اذا وفقط اذا كان $x \vee y = y$

وستكون وحيدة

لنكن R علاقة معرفة بالشكل:

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x R y$$

علينا R انعكاسية لأن:

لأنها جامعية

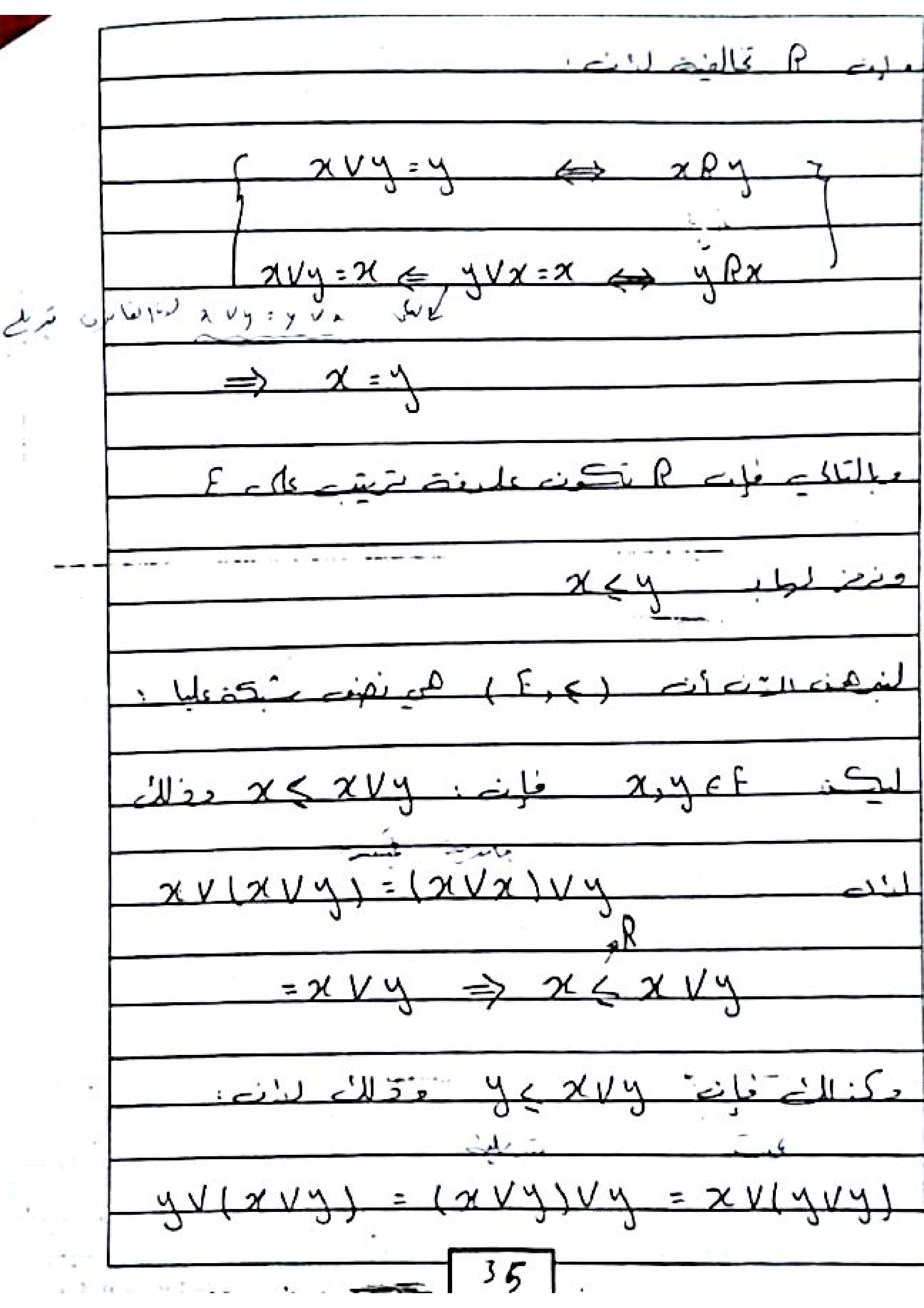
$$x R x \Leftrightarrow (x \vee x = x)$$

علينا R متعدية لأن:

$$y \vee z = z , x \vee y = y \Leftrightarrow y R z , x R y$$

$$\Leftarrow x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = z$$

$$\Leftarrow x \vee z = z \quad \Leftarrow \quad x R z$$



علاقة R تخالفية لأن:

$$\begin{cases} x \vee y = y \iff xRy \\ x \vee y = x \Leftarrow y \vee x = x \iff yRx \end{cases}$$

(تبديلي لأن العملية $x \vee y = y \vee x$)

$$\Rightarrow x = y$$

وبالتالي فإن R تكون علاقة ترتيب على E

ونرمز لها بـ $x \leq y$

لنبرهن الآن أن $(E, \leq)$ هي نصف شبكة عليا:

ليكن $x, y \in E$ فإن: $x \leq x \vee y$ وذلك

لأن $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y$ (تجميعي)

$$= x \vee y \Rightarrow x \leq x \vee y$$

وكذلك فإن $y \leq x \vee y$ وذلك لأن:

$$y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y)$$

$= x \vee y \Rightarrow y \leq x \vee y$

أي أن $x \vee y$ حد أعلى للمجموعة $\{x, y\}$ في E

ليكن M حد أعلى آخر للمجموعة $\{x, y\}$

$(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M$

$\Rightarrow x \vee y \leq M$

أي أن $x \vee y$ حد أعلى أصغر للمجموعة $\{x, y\}$

في E

أي $x \vee y = \sup_E \{x, y\}$

وبالتالي فإن E تكون نصف مشبكة عليا.

ملاحظات

يمكن البرهان أيضاً أن قانون التشكيل الداخلي

$x \wedge y$ والذي يحقق الخواص الماصية والتبسيطية

والتجميعة يمكننا ان نعرف بناءً نصف شبكة دنيا

جمعية مع علاقة الترتيب :

$$x \wedge y = x \iff x \leq y$$

وحيث يكون : $\inf_E \{x, y\} = x \wedge y$

وكذلك فإن اي قانون تشكيل داخلي $x T y$ يحقق

الخواص الابدالية والتبديلية والتجميعية على المجموعة E

يمكننا ان نعرف علاقة ترتيب :

1) $x \leq_1 y$ والمعرفة بالشكل التالي

$x T y = y$ عندها $(E, \leq_1)$ تكون

نصف شبكة عليا .

و $x T y = x \vee y$ ..

2) $x \le_2 y$ والمعرفة بالشكل التالي:

$x \top y = x$ وتكون عندها

نفرض شبكة دنيا $(E, \le_2)$

و $x \top y = x \wedge y$